

Conduction électrique sous champ magnétique

Première partie Sonde à effet hall

1.1. Vecteur courant \vec{j}

$$\vec{j} = j \vec{u}_x \quad \text{et} \quad I_o = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = jab \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j} = \frac{I_o}{ab} \vec{u}_x}$$

1.2. Charge q animée d'une vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$

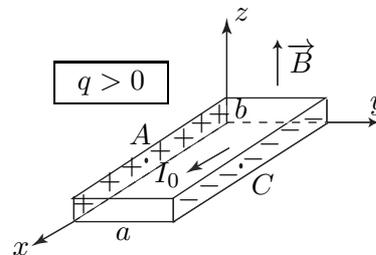
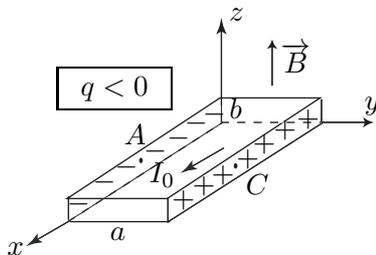
1.2.1. Force de Lorentz :

$$\vec{f}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{f}_L = -qvB \vec{u}_y}$$

1.2.2. En absence du champ magnétostatique \vec{B} , un porteur mobile de charge q est soumis à la seule force électrostatique $\vec{f}_e = q\vec{E}$ qui est à l'origine du courant électrique I_0 .

En présence du champ magnétostatique $\vec{B} = B \vec{u}_z$, un porteur mobile de charge q est soumis à la force magnétique $\vec{f}_L = -qvB \vec{u}_y$ (q et v étant du même signe Cf. 1.2.1.) qui infléchit sa trajectoire vers la face de la plaque :

- ◇ située à droite du sens de I_0 pour $q < 0 \Rightarrow$ accumulation de charges négatives sur cette face et défaut de charges sur la face opposée.
- ◇ située à gauche du sens de I_0 pour $q > 0 \Rightarrow$ accumulation de charges négatives sur cette face et défaut de charges sur la face opposée.



1.2.3. Champ hall :

On en déduit du résultat de la question précédente 1.2.2. les faits suivants :

- ◇ Apparition d'un champ électrostatique (champ hall noté \vec{E}_H) orienté vers la face située à droite du sens de I_0 (pour $q < 0$) ou vers la face située à gauche du sens de I_0 (pour $q > 0$). Dans les deux cas, un porteur de charge q est soumis à l'action de la force $\vec{f}_H = q\vec{E}_H$ (de direction l'axe Oy).

- ◇ Le régime permanent (au bout d'un certain temps) est atteint lorsque le champ hall atteint une valeur suffisante pour que $\vec{j}_H + \vec{j}_L = \vec{0}$; les lignes de courant redeviennent parallèles au champ \vec{E}_H , d'où :

$$\vec{j}_L = -q \vec{E}_h \Rightarrow \boxed{\vec{E}_h = -\frac{\vec{j}_L}{q} = vB \vec{u}_y}$$

1.2.4. Tension Hall

$$V_C - V_A = \int \vec{E}_h \cdot d\vec{y} = vBa \Rightarrow \boxed{V_h = vaB}$$

La tension de hall est positives et indépendante de la charge q .

1.2.5. Résistance de hall

$$I_o = jab \quad \text{et} \quad j = nqv \Rightarrow \boxed{V_h = \frac{BI_o}{nqb} = R_h \frac{BI_o}{b}}$$

1.3. Applications

1.3.1. La plaque \mathcal{P} est en cuivre métallique

1.3.1.1. Densité particulaire

$$\boxed{n = \frac{mN_A}{MV} = \rho \frac{N_A}{M} = 82,40 \times 10^{27} m^{-3}}$$

1.3.1.2. Résistance hall

$$\boxed{R_h = \frac{1}{nq} = -0,76 \times 10^{-10} m^3 A^{-1} s^{-1}}$$

1.3.1.3. Tension hall

$$\boxed{V_h = -0,76 \times 10^{-6} kgm^2 A^{-1} s^{-3}}$$

1.3.2. Les sondes de hall utilisées au laboratoire pour mesurer les champs magnétiques sont constituées d'un matériau semi-conducteur.

1.3.2.1. Dans un semi-conducteur et à température usuelle, la densité particulaire des porteurs majoritaires (électrons ou positrons "trous") est de l'ordre de $10^{22} m^{-3}$: plus faible que dans un conducteur, donc l'effet hall est plus important.

1.3.2.2. Dans la pratique, on mesure une tension (tension hall). Cette dernière étant proportionnelle au champ B , simple étalonnage (détermination du coefficient de proportionnalité) permet, donc, l'accès à B . exemple : utilisation en teslamètre, appelé aussi sonde à effet hall.

Deuxième partie loi d'ohm anisotrope

2.1. τ est homogène à un temps ; son unité est, donc, la seconde (s).

2.2.

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

2.3. Deuxième loi de Newton

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) - \frac{m}{\tau} \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{1}{nq} \vec{j}$$

En régime permanent :

$$q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) - \frac{m}{\tau} \vec{v} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{nq} \vec{j} \wedge \vec{B} \right) - \frac{m}{nq\tau} \vec{j} = 0$$

$$\text{ou :} \quad \vec{E} = \frac{m}{nq^2\tau} \vec{j} + \frac{1}{nq} \vec{B} \wedge \vec{j}$$

soit : $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} + R_h \vec{B} \wedge \vec{j}}$ (2) avec $\boxed{\sigma = n \frac{q^2\tau}{m} \quad \text{et} \quad R_h = \frac{1}{nq}}$

2.4. L'axe Oz est choisi tel que $\vec{B} = B \vec{u}_z$

2.4.1. Projection de l'équation vectorielle (2)

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} + R_h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{j_x}{\sigma} - R_h B j_y \\ \frac{j_y}{\sigma} + R_h B j_x \\ \frac{j_z}{\sigma} \end{pmatrix}$$

Soient : $\begin{cases} j_x = \frac{\sigma E_y - \sigma^2 R_h B E_x}{1 + \sigma^2 R_h^2 B^2} \\ j_y = \frac{\sigma E_x + \sigma^2 R_h B E_y}{1 + \sigma^2 R_h^2 B^2} \\ j_z = \sigma E_z \end{cases}$ ou : $\boxed{\begin{cases} j_x = \frac{\sigma}{1 + \tau^2 \omega_c^2} (E_y - \tau \omega_c E_x) \\ j_y = \frac{\sigma}{1 + \tau^2 \omega_c^2} (E_x + \tau \omega_c E_y) \\ j_z = \sigma E_z \end{cases}}$

2.4.2. $\vec{j} = j_x \vec{u}_x + j_y \vec{u}_y + j_z \vec{u}_z$

D'où : $\vec{j} = \vec{\sigma} \vec{E}$ avec : $\boxed{\vec{\sigma} = \frac{\sigma}{1 + \tau^2 \omega_c^2} \begin{pmatrix} 1 & \tau \omega_c & 0 \\ -\tau \omega_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \tau^2 \omega_c^2 \end{pmatrix}}$ (3)

2.4.3. les vecteurs \vec{j} et \vec{E} ne sont pas collinéaires \implies le milieu est anisotrope.

2.4.4. Oui, le milieu reste linéaire en présence du champ magnétique \vec{B} .

2.4.5. En absence du champ magnétique \vec{B} , l'équation (3) s'écrit :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

On retrouve, ainsi, la loi d'ohm pur un milieu isotrope.

Conclusion : les phénomènes liés à l'anisotropie précédente (Cf. 2.4.3.) sont plus importants dans les semi-conducteurs et ils dépendent de la géométrie du système étudié !!

Troisième partie
Effet corbino

3.1. Cas d'un champ magnétique $B = 0$

3.1.1. Le conducteur compris entre les deux cylindres n'est pas en équilibre électrostatique.

3.1.2. En M le champ $\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, z)$

Invariance :

C_a et C_b sont supposés suffisamment longs, la distribution entre les deux cylindres est, donc, invariante par translation le long de l'axe $Oz \Rightarrow E$ indépendant de la coordonnée axiale z .

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta)$$

la distribution entre les deux cylindres est invariante par rotation autour de l'axe $Oz \Rightarrow \vec{E}$ indépendant de la coordonnée orthoradiale θ .

$$\vec{E} = \vec{E}(r)$$

Symétrie :

Le plan (\vec{u}_r, \vec{u}_z) est un plan de symétrie pour la distribution entre les deux cylindres $\Rightarrow \vec{E} \in$ à ce plan

Le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie pour la distribution entre les deux cylindres $\Rightarrow \vec{E} \in$ à ce plan

Le champ \vec{E} appartient, donc, à l'intersection des deux plan, soit : \vec{u}_r

Soit :
$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

3.1.3. Expression de $E(r)$

Théorème de Gauss :
$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{intérieur à } (\Sigma)}}{\epsilon_0} = \frac{Q_a}{\epsilon_0}$$

(Σ) surface de gauss : cylindre de section πr^2 et de hauteur h

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h E(r) \quad \text{et} \quad Q_a = 2\pi a h \rho_a^s \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho_a^s a}{\epsilon_0 r}$$

3.1.4. En $r = a$

$$E_a = \frac{\rho_a^s}{\epsilon_0}$$

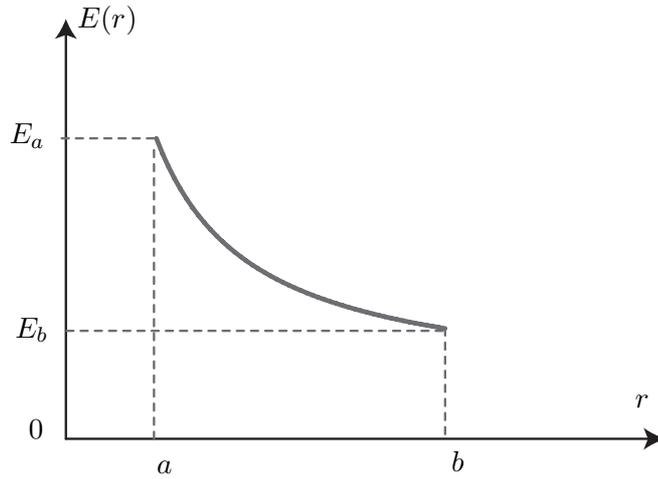
3.1.5. La circulation du champ \vec{E} :

$$\int_{C_a}^{C_b} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b E(r) dr = V_a - V_b \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_a^s a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = V_a - V = V_{ab}$$

D'où :
$$\rho_a^s = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

3.1.6. Champ \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{u}_r$$



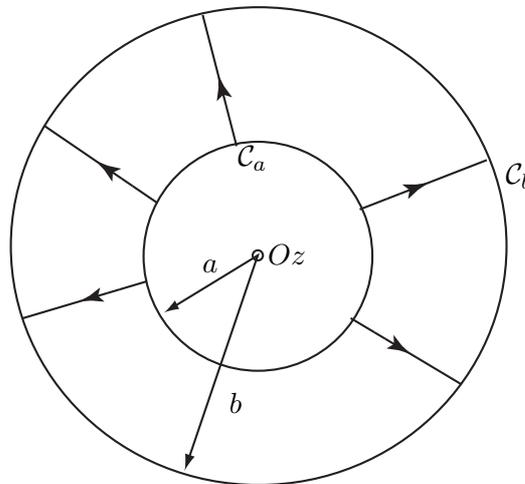
3.1.7. En $r = b$

$$E_b = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{b \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\rho_a^s a}{\epsilon_0 b}$$

Les deux cylindres sont en influence totale $\implies Q_a = -Q_b$ ou $\rho_a^s a = \rho_b^s b$

Soit : $E_b = -\frac{\rho_b^s}{\epsilon_0}$

3.1.8.



Les lignes de courant sont des droites radiales.

3.1.9. Intensité du courant électrique I_o

$$I_o = \iint_{(C_h)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec :} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma V_{ab}}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{u}_r \quad \implies \quad \boxed{I_o = \frac{2\pi h \sigma V_{ab}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

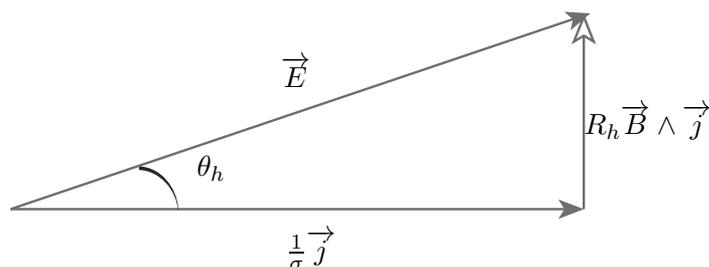
3.1.10. Résistance électrique R_o

$$R_o = \frac{V_a - V_b}{I_o} = \frac{V_{ab}}{I_o} \implies \quad \boxed{R_o = \frac{1}{2\pi h \sigma} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

3.2. Étude du milieu en présence d'un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B \vec{u}_z$

3.2.1.

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} + R_h \vec{B} \wedge \vec{j} \quad \text{Relation vectorielle de chasle}$$



$$E^2 + \frac{j^2}{\sigma^2} - 2 \frac{jE}{\sigma} \cos \theta_h = R_h B^2 j^2$$

3.2.2.

$$\tan \theta_h = \sigma \frac{\|R_h \vec{B} \wedge \vec{j}\|}{\|\vec{j}\|} = \sigma R_h B$$

3.2.3. Projection de l'équation vectorielle (2) dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$$\begin{pmatrix} E(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} + R_h B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} j_r - \sigma R_h B j_\theta \\ j_\theta + \sigma R_h B j_r \\ j_z \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{cases} j_r = \sigma E(r) + \sigma R_h B j_\theta \\ j_\theta = -\sigma R_h B j_r \\ j_z = 0 \end{cases}$$

L'équation de la ligne de courant : $\vec{j} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$

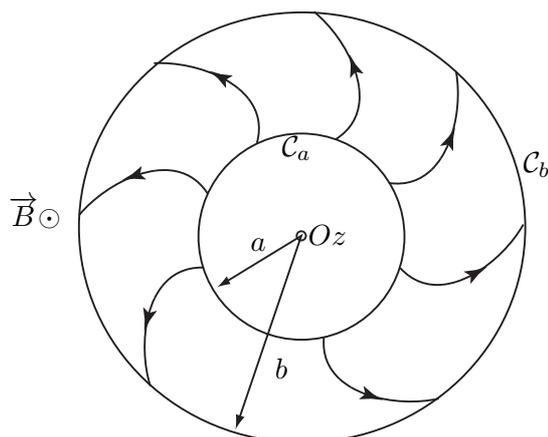
$$\text{donc : } r j_r d\theta = j_\theta dr \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{j_\theta}{j_r} d\theta = -\frac{1}{R_h B \sigma} d\theta \Rightarrow \ln r(\theta) = -\frac{1}{R_h B \sigma} \theta + k$$

La ligne de courant passe par le point de coordonnées (r_o, θ_o, z_o) donc : $k = \ln r(\theta_o) + \frac{1}{R_h B \sigma} \theta_o$

soit : $r(\theta) = r_o \exp[f(\theta)]$ (4) avec $f(\theta) = \frac{1}{R_h B \sigma} (\theta_o - \theta)$

En absence du champ ($\vec{B} = \vec{0}$), $\vec{j} = j_r \vec{u}_r = \sigma E(r) \vec{u}_r$ et $r \rightarrow \infty$: les lignes de courant sont radiales.

Commentaire : En présence du champ \vec{B} , les ligne de courant sont des spirales logarithmique avec le terme $-1/R_h B \sigma$ est positif car $R_h = -1/ne < 0$. Les porteurs de charges parcourent, donc, une distance plus grande en présence du champ \vec{B} et les spirales sont d'autant plus (incurvées) que le champ \vec{B} est plus intense.



3.2.4. Équation (2)

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} + R_h \vec{B} \wedge \vec{j}$$

3.2.4.1. D (2) on a :

$$\sigma \vec{E} = \vec{j} + \sigma R_h \vec{B} \wedge \vec{j} \Rightarrow (\sigma E)^2 = j^2 + (\sigma R_h B j)^2 \text{ ou } j_o^2 = j^2 (1 + \sigma^2 B^2 R_h^2)$$

soit :

$$j = \frac{j_o}{\sqrt{1 + \sigma^2 B^2 R_h^2}}$$

3.2.4.2. Expression de j_r

$$j_r = \vec{j} \cdot \vec{u}_r = j \cos \theta_h \text{ avec } \cos \theta_h = \frac{j}{\sigma E(r)} = \frac{j}{j_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2 B^2 R_h^2}}$$

soit :

$$j_r = \frac{j_o}{1 + \sigma^2 B^2 R_h^2}$$

3.2.5. Intensité de courant I traversant la section cylindrique C_h

3.2.5.1.

$$I = \iint_{(C_h)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h j_r = \frac{2\pi r h j_o}{1 + \sigma^2 B^2 R_h^2} \Rightarrow I = \frac{I_o}{1 + \sigma^2 B^2 R_h^2}$$

3.2.5.2. Résistance électrique R en présence du champ magnétique \vec{B} : Magnétorésistance

$$I = \frac{I_o}{1 + \sigma^2 B^2 R_h^2} = \frac{V_{ab}}{R_o (1 + \sigma^2 B^2 R_h^2)} = \frac{V_{ab}}{R}$$

soit :

$$R = R_o (1 + \sigma^2 B^2 R_h^2)$$

3.2.5.3. Variation relative de résistance

$$\delta = \frac{R - R_o}{R_o} = R_h^2 B^2 \sigma^2$$

3.2.5.4. !!!!

3.2.5.5. Application numérique : (conducteur)

$$\delta = 1,76 \times 10^{-5}$$

La valeur de δ est faible, cependant elle est mesurable !

3.2.5.6. Application numérique : (semi-conducteur)

$$\delta = 4,9 \times 10^{-1}$$

Dans le cas d'un semi-conducteur, l'effet de magnétorésistance est considérable comparé à un conducteur !